

Асимптотика в комбинаторике и ТЧ

19 июля

1. **(а)** Докажите, что существует число, большее 1000000 , которое нельзя представить в виде суммы квадрата и куба натуральных чисел.
- (б)** Докажите, что существует число которое можно представить в виде суммы трех квадратов не менее, чем 1000 способов.
2. Вася ставит на плоскость одну черную точку затем Петя – сто белых (в уже покрашенную точку снова ходить нельзя). Сможет ли Вася поставить черные точки в вершины правильного треугольника?
3. Дана строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$. Докажите, что:
(а) Если $a_n < 100n$, то в десятичной записи какого-то члена последовательности встретится цифра 2.
(б) Если $a_n < n^{10}$, то числа a_n в совокупности имеют бесконечное число простых делителей.
4. Верно ли, что из любого числа можно получить полный квадрат, добавляя к его десятичной записи не более 10 цифр? Цифры можно вставлять в любые места.
5. Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Докажите, что найдётся бесконечно много n , таких что **(а)** $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$; **(б)** $S(2^{n+1}) \leq S(2^n)$.
6. Клетки клетчатой плоскости пронумерованы натуральными числами. Докажите что есть две соседние клетки, номера которых отличаются хотя бы на 10^{100} .
7. **(а)** Из бесконечной клетчатой доски выкинули несколько клеток, никакие две из которых не являются соседними по стороне и по диагонали. Всегда ли оставшуюся часть можно разбить на доминошки?
(б) Из бесконечной клетчатой доски выкинули все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшуюся часть доски обойти ходом шахматного коня?
8. У Пети есть бесконечно много одинаковых треугольных салфеток. Докажите, что для достаточно большого R Петя сможет покрыть этими салфетками более 99% площади круглого стола радиуса R (салфетки не перекрываются, не вылезают за край стола, их можно переворачивать).
9. Пусть $d(m)$ — количество натуральных делителей числа m . Докажите, что последовательность $d(n^2 + 1)$ не является строго возрастающей ни с какого момента.
10. Существует ли отображение из шара радиуса 1 в круг радиуса 10^{100} , не уменьшающее никакие расстояния?